

Listening to the coefficient of restitution and the gravitational acceleration of a bouncing ball

C. E. Aguiar* and F. Laudares†

*Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Cx.P. 68528, Rio de Janeiro, 21945-970, RJ, Brasil*

We show that a well known method for measuring the coefficient of restitution of a bouncing ball can also be used to obtain the gravitational acceleration.

PACS numbers: 01.50.Ht, 01.50.Lc

Three contributions to this journal have described how to measure the coefficient of restitution between a ball and a flat surface using the sound made by the collision of the ball with the surface.^{1,2,3} The procedure reported in these papers is to drop the ball vertically on a horizontal surface, allow it to bounce several times, while recording the sound produced by the impacts. Analysis of the recording gives the time intervals between successive rebounds, and from these the coefficient of restitution is obtained.

The evolution of the techniques described in these papers is a nice example of how the development of microcomputers has changed the science teaching laboratory. In 1977, Bernstein¹ detected the sound with a microphone, amplified and filtered the signal, and fed it to a pen recorder. Smith, Spencer and Jones,² in 1981, connected the microphone to a microcomputer via a homemade data collection and interface circuit, and then uploaded the resulting data to a larger computer for analysis and graphical display. In 2001, Stensgaard and Lægsgaard³ used the microphone input of a PC sound card to make the recording, reducing the experimental equipment to basically a standard microcomputer.

To see how the coefficient of restitution ϵ is related to the time between bounces, note that if ϵ is constant (independent of velocity), and air resistance is negligible, the velocity of the ball just after the n th bounce on the fixed surface is given by

$$v_n = v_0 \epsilon^n \quad (1)$$

where v_0 is the velocity just before the first impact. The time-of-flight T_n between the n th and $(n+1)$ th collisions is proportional to v_n ,

$$T_n = \frac{2v_n}{g}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

where g is the gravitational acceleration. Thus

$$T_n = T_0 \epsilon^n, \quad (3)$$

where we have defined $T_0 \equiv 2v_0/g$. Taking the logarithm of both sides of Eq. (3) we obtain

$$\log T_n = n \log \epsilon + \log T_0, \quad (4)$$

so that the plot of $\log T_n$ vs n is a straight line of slope $\log \epsilon$ and intercept $\log T_0$. Thus, as long as it is independent of velocity, the coefficient of restitution can be

obtained by fitting the straight-line of Eq. (4) to the time-of-flight data.

The purpose of this note is to point out that this straight-line fit can also be used to determine another physical quantity of interest: the gravitational acceleration g . The (rather simple) observation is that, if the ball is released from a known height h , then $T_0 = (8h/g)^{1/2}$, and

$$g = \frac{8h}{T_0^2}. \quad (5)$$

Thus, just as the slope parameter of Eq. (4) fixes the coefficient of restitution, the intercept parameter determines the acceleration of gravity (if the easily measured initial height h is known).

In order to check how this works in practice, we have dropped a “superball” from a measured height onto a smooth stone surface and recorded the sound produced by the successive impacts. The recording was made with the microphone and sound card of a PC running Windows, using the sound recorder program that comes with the operating system. The sampling frequency was 22,050 Hz, resulting in a time resolution of 45 μ s. The audio file, stored in the binary WAV format, was converted to ASCII text format with the shareware program AWAVE AUDIO.⁴ The recorded signal is plotted in Fig. 1,

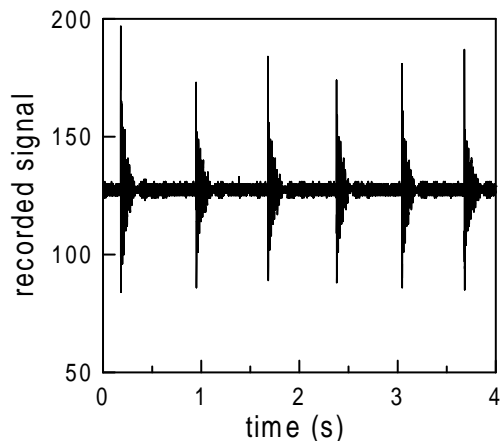


FIG. 1: The sound of a ball bouncing on a horizontal surface. The zero sound level corresponds to 128 in the vertical axis.

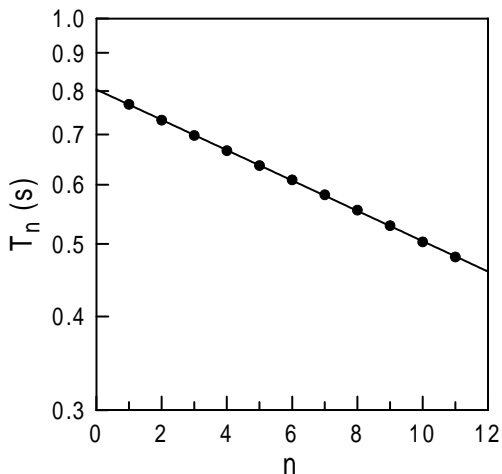


FIG. 2: Time-of-flight T_n between impacts n and $n + 1$. The line is the least-squares fit using Eq. (4).

where the pulses corresponding to individual impacts are easily recognized (only the first six collisions are shown). We have used 8-bit resolution in the recording, so that data values can only go from 0 to 255. The no-signal value corresponds to 128.

The time intervals T_n between collisions n and $n + 1$ were obtained directly through inspection of the ASCII sound file. They are plotted in Fig. 2 (in logarithmic scale) as a function of n . The least-squares fit of the T_n data set to Eq. (4) gives

$$\epsilon = 0.9544 \pm 0.0002, \quad (6a)$$

$$T_0 = 0.804 \pm 0.001 \text{ s}. \quad (6b)$$

The best-fit line is also shown in Fig. 2.

The ball was released from a height $h = 79.4 \pm 0.1$ cm above the surface. Taking this and the adjusted T_0 into Eq. (5), we obtain for the gravitational acceleration

$$g = 982 \pm 3 \text{ cm/s}^2.$$

For comparison, the value of g in Rio de Janeiro is 978.8 cm/s^2 .

The applicability of the method described above depends on ϵ being constant over the range of impact velocities involved in the experiment. That this condition is satisfied in the present case is seen in Fig. 3, where the coefficient of restitution for an impact at velocity v_n , $\epsilon = v_{n+1}/v_n = T_{n+1}/T_n$, is plotted as a function of T_n (recall that $v_n \propto T_n$, see Eq. (2)). The coefficients of restitution for the different impacts are all very close to the least-squares value given in Eq. (6), indicated by the dashed line in Fig. 3.

A case in which the coefficient of restitution depends on the velocity is shown in Fig. 4, where we display the times of flight of a superball dropped from $h = 27.5 \pm 0.1$ cm onto a wood surface. A plot of ϵ at each collision, shown in Fig. 5, reveals a clear dependence of the coefficient

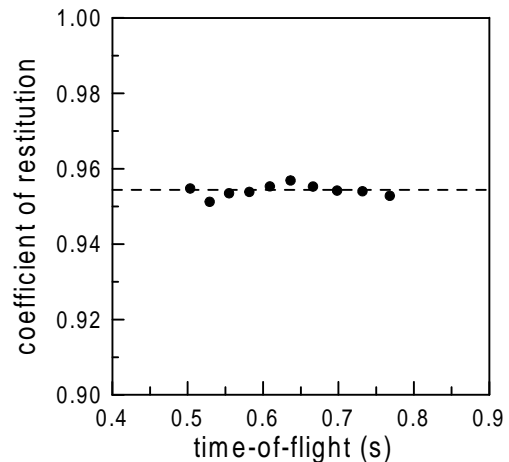


FIG. 3: The coefficient of restitution $\epsilon = T_{n+1}/T_n$ as a function of the time-of-flight T_n , for the data of Fig. 2. The dashed line indicates the adjusted value given in Eq. (6).

of restitution on the time-of-flight (or impact velocity). Assuming a linear relation between ϵ and T , as suggested by Fig. 5,

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \alpha T), \quad (7)$$

we obtain an extension of Eq. (3)

$$T_n = T_0 \epsilon_0^n \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha T_i). \quad (8)$$

The least-squares fit of Eq. (8) to the data shown in Fig. 4 gives

$$\epsilon_0 = 0.921 \pm 0.001, \quad (9a)$$

$$\alpha = 0.078 \pm 0.003 \text{ s}^{-1}, \quad (9b)$$

$$T_0 = 0.4752 \pm 0.0005 \text{ s}. \quad (9c)$$

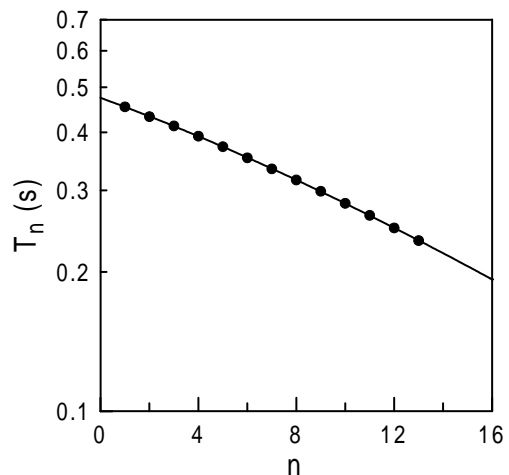


FIG. 4: Time-of-flight T_n between impacts n and $n + 1$. The curve is the least-squares fit using Eq. (8).

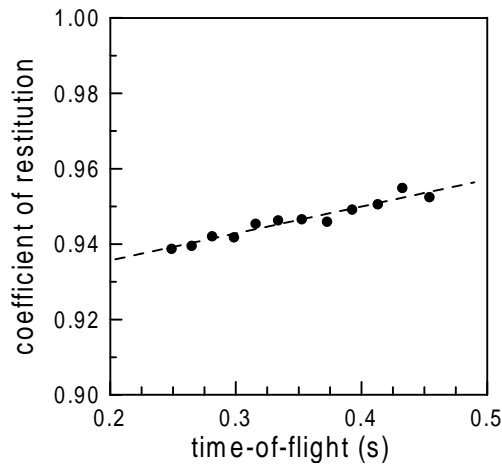


FIG. 5: The coefficient of restitution $\epsilon = T_{n+1}/T_n$ as a function of T_n , for the data of Fig. 4. The dashed line is the linear relation of Eq. (7) with the adjusted parameters given in Eq. (9).

The curves corresponding to these parameters are also

shown in Figs. 4 and 5. The above value for T_0 yields

$$g = 974 \pm 5 \text{ cm/s}^2 ,$$

again a very reasonable value. Consideration of the velocity dependence of the coefficient of restitution was important in order to get an accurate result; had we assumed a constant ϵ , we would obtain $g = 935 \pm 10 \text{ cm/s}^2$.

To summarize, we have seen that the value of the gravitational acceleration is a useful by-product of experiments devised to “hear” the coefficient of restitution of a bouncing ball. The measurement of g is particularly simple if the coefficient of restitution is independent of the impact velocity, but more complicated cases can also be handled.

After this work was completed we learned of a recent paper by Cavalcante *et al.*,⁵ in which g was measured using the sound of a bouncing ball. The analysis presented in the paper is, however, somewhat different from ours. Another related reference is the article by Guercio and Zanetti⁶ in this journal.

* Electronic address: carlos@if.ufrj.br

† Electronic address: flaudares@hotmail.com

¹ A.D. Bernstein, “Listening to the coefficient of restitution,” *Am. J. Phys.* **45**, 41-44 (1977).

² P.A. Smith, C.D. Spencer, and D.E. Jones, “Microcomputer listens to the coefficient of restitution,” *Am. J. Phys.* **49**, 136-140 (1981).

³ I. Stensgaard and E. Lægsgaard, “Listening to the coefficient of restitution - revisited,” *Am. J. Phys.* **69**, 301-305 (2001).

⁴ AwaveAudio (audio file format converter), FMJ-Software, <http://www.fmjsoft.com>

⁵ M.A. Cavalcante, E. Silva, R. Prado, and R. Haag, “O estudo de colisões através do som,” *Revista Brasileira de Ensino de Física* **24**, 150-157 (2002).

⁶ G. Guercio and V. Zanetti, “Determination of gravitational acceleration using a rubber ball,” *Am. J. Phys.* **55**, 59-63 (1987).

O Estudo de Colisões através do Som

Marisa Almeida Cavalcante, Elias da Silva, Reginaldo do Prado
 GoPEF-PUC/SP, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Departamento de Física
 Rua Marques de Paranaguá 111, CEP 01306-000, São Paulo, SP
 marisac@pucsp.br

Rafael Hagg
 Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
 Caixa Postal 15051, 91501-970, Porto Alegre, RS
 haag@if.ufrgs.br

Recebido em 3 de abril, 2002. Aceito em 29 de abril, 2002.

O experimento proposto neste artigo permite ao professor de Física estabelecer uma metodologia computacional para o estudo de movimentos e, particularmente, do coeficiente de restituição em colisões através do espectro sonoro emitido por impactos sucessivos de uma esfera em uma superfície plana. O método de medida sugerido, além de requerer um equipamento de fácil acesso, propicia adequada precisão, como revelam os dados obtidos, já que a aquisição é realizada através de placas de som de microcomputadores pessoais, com tempos de resolução, hoje, da ordem de $23 \mu\text{s}$ para taxas de amostragem de até 44 KHz. Utilizamos um software de análise do espectro sonoro que apresenta o sinal na forma de gráfico de frequência versus tempo, livremente disponível na Internet e com uma ampla disponibilidade de recursos.

This article presents an experience that allows determining the restitution coefficient in collisions using spectrum of the sound emitted by successive impacts of a sphere in a plane surface. The data are acquired through PC sound card, with times of resolution of order of $22 \mu\text{s}$ and sampling rates of up to 44 KHz and that allows to obtain results with a good precision as it can be seen through the results obtained in this work. The spectrum of the sound is analyzed with shareware software that presents the sign in the graphic form of frequency versus time and that has many resources. The equipment used in this experiment is found easily, as well as the software to analyze the sound sign.

I Modelo

Quando uma esfera é solta de uma determinada altura e colide com uma superfície plana e lisa, possivelmente voltará a subir até uma altura menor que a inicial e novamente colidirá com o piso. Este movimento pode se repetir algumas vezes até o momento em que a esfera não mais deixará o solo e permanecerá em repouso tendo perdido toda energia de movimento. Denominamos de coeficiente de restituição, ε , a relação entre os módulos das velocidades antes e após um impacto. Uma *colisão elástica* é caracterizada por $\varepsilon = 1$,

$$\frac{m_2}{m_1} \cong 0$$

diferentemente uma colisão *completamente inelástica* possuirá $\varepsilon = 0$. Um modelo simplificado[1], mas que eficientemente pode ser usado para representar a colisão entre dois corpos está visto na Fig. 1. Usando

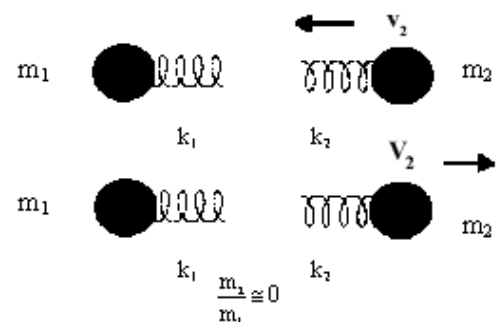


Figura 1. Um modelo de colisão entre uma massa m_1 de constante elástica k_1 e uma massa m_2 de constante elástica k_2 . As velocidades imediatamente antes, (v_2) e após (V_2) a colisão estão mostradas acima.

esta figura para descrever nosso experimento, as massas m_1 e m_2 representam a superfície e a esfera respectivamente. A velocidade da esfera imediatamente antes do

impacto é dada por v_2 e, logo após perder o contato com a superfície, será V_2 . Assumimos, no experimento que a massa m_1 possui um valor muito grande se comparada à massa da esfera, m_2 . Usando-se as leis de conservação do *momentum linear*, é possível verificar que a massa m_1 permanece em repouso após o choque com a massa m_2 , o que está de acordo com o senso comum. Neste modelo de colisão, a deformação que a superfície e/ou esfera sofre em virtude do impacto pode ser mais bem entendida acoplando-se molas de constantes elásticas k_1 e k_2 na superfície e na esfera, respectivamente.

Durante o impacto, exatamente no instante em que a velocidade da esfera torna-se nula, se admitirmos que não há perda de energia até este momento (uma boa aproximação), logo toda a energia cinética existente antes da colisão será convertida em energia potencial armazenada nas molas. Se a totalidade dessa energia fosse novamente transformada em energia de movimento ($\varepsilon = 1$), veríamos a esfera retornar até a altura em que foi solta (admitindo um movimento unidimensional). Na realidade isto não ocorre, pois parte ou a totalidade (colisão *completamente inelástica*) desta energia é perdida. O coeficiente de restituição está intimamente relacionado com a energia consumida durante essa efêmera deformação e depende da combinação dos valores de k_1 e k_2 [2]. Explorando este modelo de colisão com mais atenção, observamos que, quando uma esfera colide com uma superfície muito rígida ($k_1 \gg k_2$), apenas a esfera sofrerá deformação durante o impacto. Às vezes esta deformação pode ser irreversível. Isso ocorre quando uma esfera com grande energia cinética inicial, E_i , e k elevado, colide com uma superfície cujo coeficiente de deformação, k , facilmente passa do regime elástico para o plástico¹, por exemplo, certos tipos de madeira. Se observarmos com atenção, notaremos que as colisões nas condições descritas acima produzem pequenas “marcas” na madeira e esta energia gasta na deformação provoca uma redução do valor numérico do coeficiente de restituição. As dimensões da superfície e da esfera também afetam o coeficiente de restituição, particularmente se a duração do impulso for comparável com o período de vibração dos objetos envolvidos no impacto [3]. Outra complicação no estudo da dinâmica da colisão reside no fato de que k_1 e k_2 não são constantes durante o choque e, além disto, possuem comportamento não-linear [1]-[2]. Por isso, é muito complexo descrever os processos envolvidos na perda de energia durante a colisão [4]. Apesar disto - felizmente - podemos extrair várias informações relevantes para o estudo de colisões entre a esfera e a superfície, apenas analisando o sinal sonoro produzido durante os impactos.

¹Caracterizamos por regime elástico um sistema que admite expansão/compressão reversível, em que o valor da constante elástica, k , permanece constante em função da força que lhe é aplicada. Se a força aplicada ultrapassar o limite admitido de expansão/compressão, o sistema passa para o regime plástico em que k não mais será constante, e a deformação provocada por esta força será irreversível.

II Introdução

Nossa proposta utiliza recursos computacionais para a coleta de dados, que dispensa o uso de interfaces conversoras externas, recorrendo às específicas como a placa de som que, normalmente, acompanha os microcomputadores atuais. Tal procedimento nos permite criar novas perspectivas para a inserção da experimentação assistida por computador no ensino de Ciências, visto que promove facilidades como:

- custo zero para a implementação de sistemas de medida;
- afasta a necessidade de conhecimentos em eletrônica para a construção de interfaces conversoras;
- não é necessário dominar nenhuma linguagem de programação para iniciar um trabalho nesta área.

Trabalhos nacionais recentes, Haag [5], Montarroyos [6] e Aguiar [7], apontam grandes possibilidades de renovação nas técnicas em medidas físicas para um laboratório didático.

Dentre as inúmeras possibilidades, optamos por utilizar a placa de som de um PC para a coleta de dados, por várias razões:

- a) simplicidade nos equipamentos necessários para desenvolver o experimento;
- b) alta precisão nos resultados obtidos, já que os tempos de resolução na maioria das placas de som dos PCs podem ser tão pequenos quanto 23 μ seg (para taxas de amostragem de 44 KHz).

Existem vários softwares livres disponíveis na Internet [8] que permitem usar as entradas e saídas de áudio da placa de som para simular e, também, transformar o microcomputador em instrumento de medida, com um excelente desempenho. Neste trabalho utilizaremos, para obtenção e análise de espectro sonoro, o Spectrogram [9], que apresenta o sinal na forma de gráfico de frequência versus tempo.

A proposta consiste em obter o registro em um arquivo wav do som emitido, nos impactos sucessivos de uma esfera solta de uma altura h em uma superfície plana.

Durante o impacto da esfera com a superfície de apoio, um som é irradiado, cujo registro é efetuado através de um microfone conectado à entrada da placa de som do PC. A partir do sinal sonoro, faz-se uma reprodução gráfica do tempo obtido entre colisões sucessivas e com isso várias informações, tanto cinemáticas quanto dinâmicas podem ser facilmente obtidas.

III Determinação do Coeficiente de Restituição

O trabalho recentemente publicado por I. Stensgaard e E. Laegsggard [10] descreve a técnica de medida que utilizaremos para obter informações sobre o coeficiente de restituição na interação entre uma esfera e uma superfície horizontal.

O princípio deste método, que pode ser encontrado em detalhes no artigo de Alan Bernstein [11] publicado em 1977 e depois atualizado por P.A Smith, C.D Spencer, e D. E. Jones [12] na década de 80, consiste basicamente no registro, através de um microfone, do som produzido pelos impactos sucessivos de uma esfera, solta de uma altura H_1 contra uma superfície plana, conforme indica o esquema abaixo.

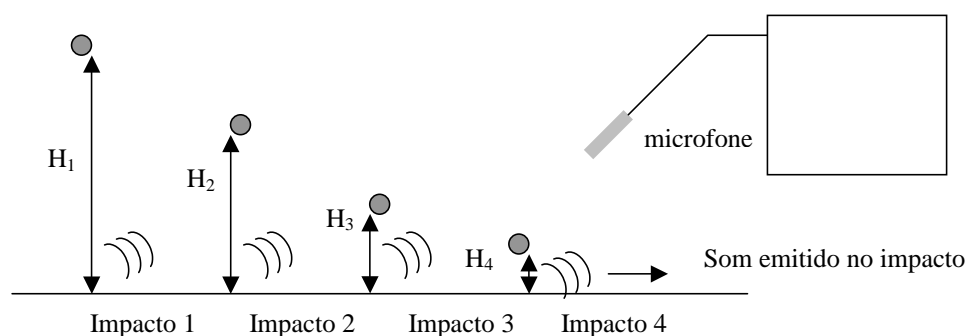


Figura 2. Diagrama do experimento.

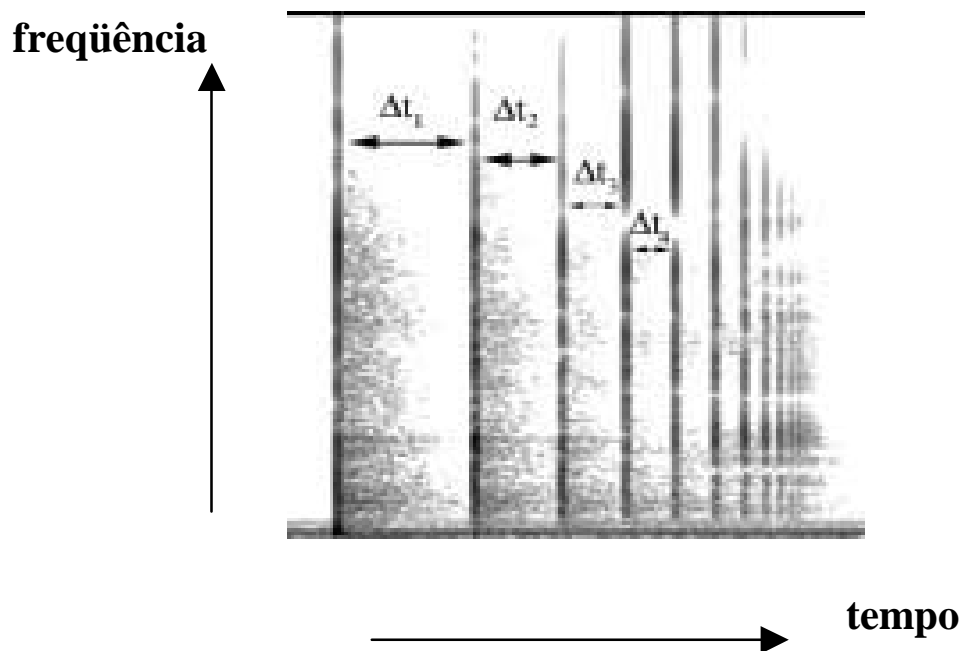


Figura 3. Representação visual do sinal sonoro obtido através do software Spectrogram.

Os intervalos de tempo entre os impactos sucessivos podem ser facilmente obtidos diretamente pelo observador, conforme indica a Fig. 3.

A cada impacto da esfera contra a superfície, ocorre a perda de energia cinética, reduzindo-se a altura

máxima que ela pode atingir no seu retorno ($H_{n+1} < H_n$). A grandeza que determina esta fração de perda é o coeficiente de restituição ϵ , que pode ser determinado através da relação entre as velocidades, depois e antes da colisão.

Torna-se muito útil definirmos um fator de perda de energia cinética, f , após a colisão entre a esfera e o

piso.

$$f = (E_i - E_f)/E_i = \left(\frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}m_2V_2^2 \right) / \frac{1}{2}m_2v_2^2 = v_2^2 - V_2^2/v_2^2 \quad (1)$$

onde E_i indica a energia cinética inicial, antes da colisão, e E_f a energia cinética após a colisão. Lembrando-se que $\varepsilon = V_2/v_2$, então, f , torna-se:

$$f = (1 - \varepsilon^2) \quad (2)$$

Numa colisão perfeitamente elástica, temos $\varepsilon = 1$, assim $f = 0$, ou seja, nenhuma energia cinética será perdida durante a colisão. Nesta situação teórica, podemos determinar facilmente o comportamento da esfera que está colidindo com o piso. Encontramos as equações que descrevem o movimento da esfera com algumas poucas manipulações algébricas, e os resultados mostram que

a esfera, após a colisão, voltará até o ponto de onde foi solta. Este resultado jamais será visualizado, pois sempre a colisão entre a esfera e a superfície será acompanhada de uma perda de energia fazendo com que a altura máxima alcançada pela esfera após o impacto seja sempre menor que a altura inicial. É fácil notar que quanto menor o coeficiente restituição na colisão *esfera-superfície* maior é a taxa de redução nos intervalos de tempo entre os impactos. Esta dependência pode ser vista no gráfico da Fig. 4 para duas interações distintas, esfera de vidro colidindo com superfície de madeira e uma superfície de pedra.

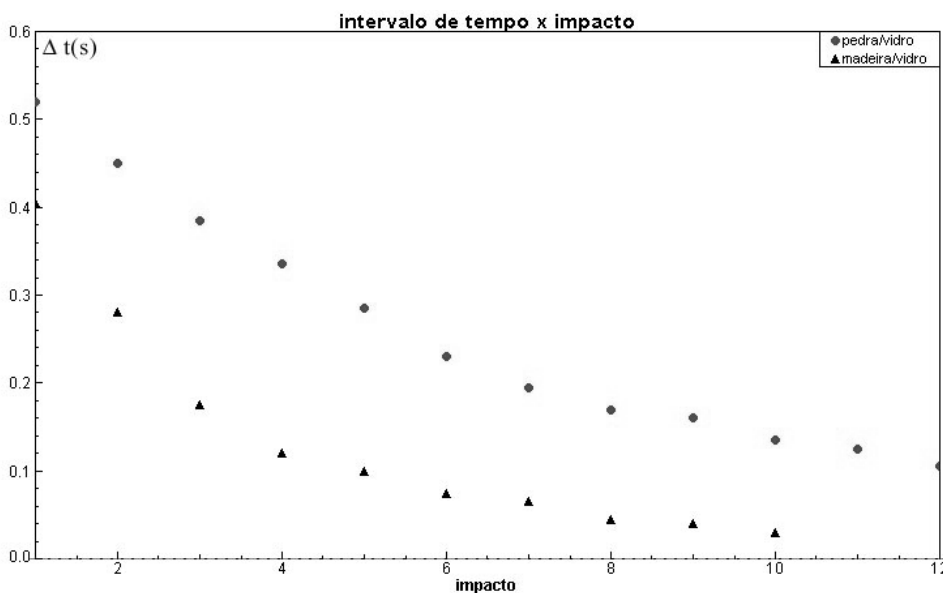


Figura 4. O gráfico mostra a taxa com a qual o intervalo de tempo entre colisões sucessivas diminui para dois tipos de interações distintas, indicando que, para a interação vidro x pedra, o coeficiente de restituição apresenta um maior valor.

Para uma interação *esfera - superfície*, a relação entre o valor da componente vertical das velocidades antes e depois do impacto fornece o valor do coeficiente de restituição.

Supondo que a fração de perda de energia cinética é constante, independentemente do valor da velocidade de impacto da esfera de massa m_2 , teremos que:

$$\varepsilon = \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad (3)$$

onde n representa o índice associado ao impacto.

Para o impacto de ordem n , o valor da velocidade

pode ser obtido pela relação:

$v_n = \frac{g\Delta t_n}{2}$, onde Δt_n é o intervalo de tempo entre impactos sucessivos.

Substituindo os valores das componentes verticais de velocidade na equação 2, teremos;

$$\varepsilon = \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} \quad , \quad (4)$$

onde n representa o índice associado ao impacto.

Propomos, neste artigo, que o coeficiente de restituição, diferentemente dos trabalhos anteriormente publicados [10]-[12] seja obtido através da inclinação

da reta no gráfico $\Delta t_{n+1} \times \Delta t_n$. Com o objetivo de determinar uma média, para o coeficiente de restituição, vários lançamentos foram efetuados de diferentes alturas ($h=100, 75, 50$ e 25 cm) para cada tipo de in-

teração.

Os gráficos abaixo mostram alguns resultados obtidos:

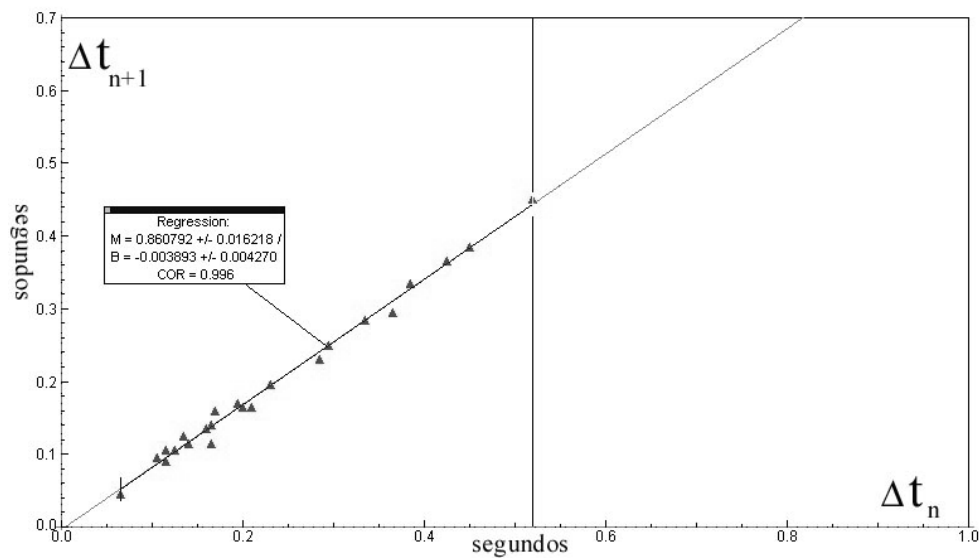


Figura 5. Interação vidro \times pedra, coeficiente de restituição $e = 0,86$.

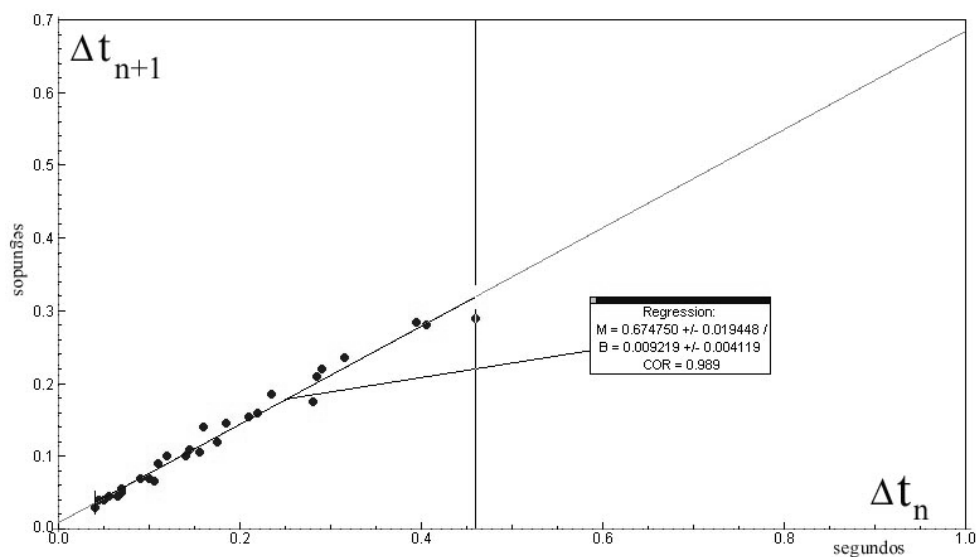


Figura 6. Interação vidro \times madeira, coeficiente de restituição $e = 0,67$.

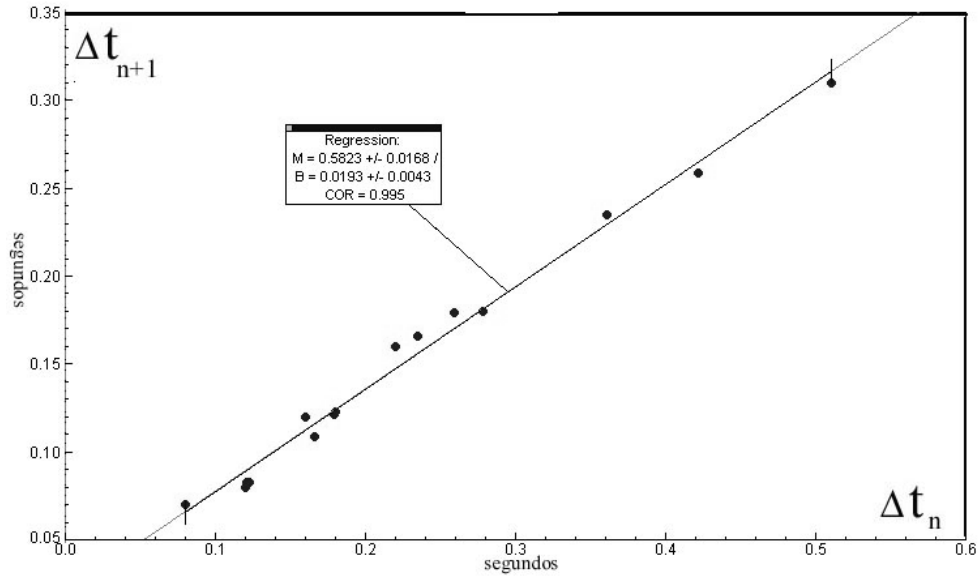


Figura 7. Interação aço × madeira, coeficiente de restituição $e = 0,58$.

IV Determinação das alturas de lançamento

Supondo que a fração de perda de energia cinética, f , é constante, para uma dada interação, podemos determinar a altura da qual uma esfera foi abandonada em relação à superfície.

Para compreender de que maneira podemos determinar a altura de lançamento da esfera, considere-se $\Delta t_{n,m}$ como o intervalo de tempo para um dado impacto n e lançamento m . A componente vertical de velocidade de uma esfera que alcança a altura H_2 da Fig. 2 é dada pela relação:

$$v_{\text{depois}} = \frac{g\Delta t_{1,1}}{2}, \quad (5)$$

onde $\Delta t_{1,1}$ representa o do intervalo de tempo entre o primeiro e segundo impacto para o lançamento 1. A velocidade com a qual a esfera atinge o solo é

$$v_{\text{antes}} = \sqrt{2gh_{\text{inicial}}}. \quad (6)$$

Por outro lado, o coeficiente de restituição é dado por:

$$\frac{v_{\text{depois}}}{v_{\text{antes}}} = \varepsilon. \quad (7)$$

Generalizando, para qualquer lançamento m e impacto n , a altura atingida comparada ao lançamento 1, cuja altura inicial é conhecida, temos:

$$\frac{\Delta t_{n,1}}{\sqrt{H_{\text{inicial},1}}} = \frac{\Delta t_{n,m}}{\sqrt{H_{\text{inicial},m}}} = \varepsilon \quad (8)$$

e

$$\frac{\Delta t_{n,1}}{\Delta t_{n,m}} = \sqrt{\frac{H_{\text{inicial},1}}{H_{\text{inicial},m}}}. \quad (9)$$

Assim, podemos obter facilmente a relação entre as alturas iniciais de diferentes lançamentos.

Os gráficos abaixo mostram claramente a relação linear, cujo valor de inclinação fornece a raiz quadrada da relação entre as alturas iniciais estabelecidas em cada caso.

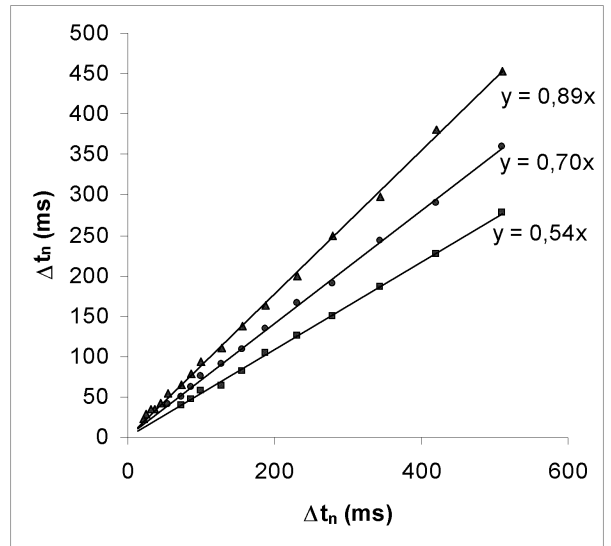


Figura 8. Fixamos um lançamento de altura inicial conhecida para o eixo x ($H = 100\text{cm}$) e para o eixo y inserimos os valores dos intervalos de tempo dos impactos correspondentes às alturas que consideramos desconhecidas.

A partir da inclinação das retas obtidas da eq. (9), tomando-se $H_{\text{inicial},1} = 100\text{cm}$, obtêm-se os resultados

da tabela 1

Tabela 1

Inclinação da reta	0,54	0,70	0,89
Altura obtida em cm	29,2	49,0	79,2

Os valores fixados para estas alturas foram 30 cm, 50 cm e 80 cm aproximadamente, em boa concordância com os valores obtidos.

V Determinação da aceleração da gravidade

Ao considerarmos constante a fração de perda de energia cinética da esfera nos impactos sucessivos de uma esfera com uma dada superfície, estabelecemos as condições de contorno necessárias para determinar o valor da aceleração da gravidade.

Para compreender de que maneira podemos determinar o valor da aceleração da gravidade, considere-se que o valor da velocidade vertical da esfera solta a altura h , antes da colisão com uma superfície plana, é dada por:

$$v_{\text{antes}} = \sqrt{2gh} \quad (10)$$

Por outro lado, o valor da componente vertical da velocidade depois da colisão é dada por:

$$v_{\text{depois}} = \frac{g\Delta t_1}{2} \quad (11)$$

Assim temos que:

$$\varepsilon^2 = \frac{g\Delta t_1^2}{8h} \quad (12)$$

Substituindo-se o valor de ε pela relação entre os intervalos de tempo, indicado na equação 3, temos;

$$g = \frac{8h\Delta t_2^2}{\Delta t_1^4} \quad (13)$$

Sendo h , a altura de que a esfera é solta, Δt_2 o intervalo de tempo obtido entre o impacto 3 e 2 da Fig. 2 e Δt_1 , e intervalo de tempo obtido entre o impacto 2 e 1 (Fig. 2).

Se consideremos constante o valor do coeficiente de restituição, a relação da Eq. 12 deve ser obedecida, para qualquer interação, o que permite obter o valor da aceleração da gravidade.

Vários lançamentos foram realizados para distintas interações esfera-superfície, obtendo-se o gráfico representado na Fig. 9.

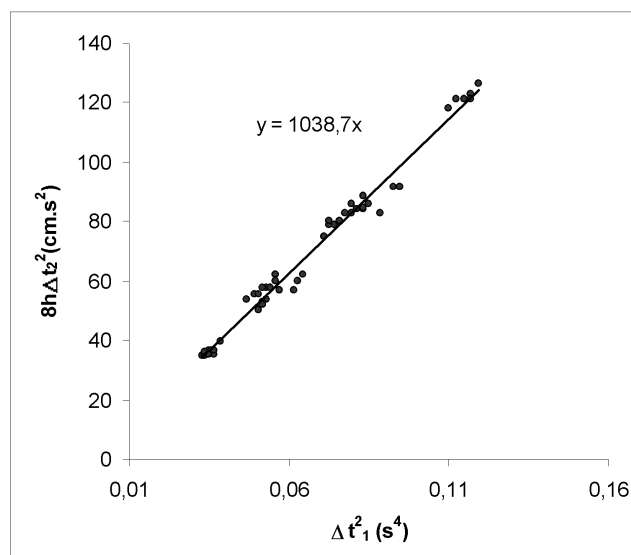


Figura 9. gráfico mostra a relação linear obtida para vários lançamentos com diferentes pares superfície \times esfera. O valor da inclinação da reta fornece a aceleração da gravidade.

O valor obtido para a aceleração da gravidade, considerando-se a propagação de erros sistemáticos e estatísticos [15], foi de $(1038,7 \pm 49,6)$ cm/s^2 , valor este bastante satisfatório.

VI Conclusão

Neste artigo mostramos um modo experimental para obter alguns parâmetros físicos envolvidos numa colisão entre esferas e superfícies de diferentes materiais, usando o espectro sonoro irradiado durante a colisão. Os resultados obtidos revelam que a precisão do experimento é adequada e que ele pode ser facilmente implementado, praticamente sem custos, em qualquer laboratório didático de física que possua um PC com placa de som.

O valor obtido para a aceleração da gravidade permite assegurar, com um grau de segurança considerável, a aplicabilidade deste método, já que o valor esperado está contemplado no intervalo obtido.

A inviabilidade deste método está associada à garantia experimental de manter constante a fração de perda de energia cinética nos impactos sucessivos. Assim, desaconselhamos que se proceda a interações em que deformações no impacto são fortemente evidenciadas, por exemplo, colisões com superfícies de madeira.

Quanto maior o valor para o coeficiente de restituição melhor será a convergência dos resultados e menor devem ser os desvios experimentais obtidos.

O professor interessado pode ir além e sugerir aos alunos comparar os dados obtidos no experimento com os previstos através de processos de modelação computacional [13] que facilmente são executados com o auxílio de softwares específicos para esta tarefa, como; Modellus, *Matlab* [14] entre outros.

Referências

- [1] CROSS, R. *The bounce of a ball*. Am. J. Phys. **67** (4), March 1999, pp. 222 – 227.
- [2] CROSS, R. *The coefficient of restitution for collisions of happy balls, unhappy balls, and tennis balls*. Am. J. Phys. **68** (12), November 2000, pp. 1025 – 1031.
- [3] KHARAZ, A. H., GORHAM, D. A. AND SALMAN, A. D., *An experimental study of the elastic rebound of spheres*. Powder Technology, **120**, 2001, pp. 281 – 291.
- [4] GUGAN, D. *Inelastic collision and the Hertz theory of impact*. Am. J. Phys. **68** (11), October 2000, pp. 920 – 924.
- [5] HAAG, R. *Utilizando a Placa de Som do Micro PC no Laboratório didático de Física*; Rev. Bras. de Ensino de Física, Vol. **23**, no. 2, Junho de 2001, pp.176- 183.
- [6] MONTARROYS, E. e MAGNO, W. C. *Aquisição de Dados com a Placa de Som do Computador*. Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. **23**, no. 1, Março de 2001, pp. 57-62.
- [7] <http://www.if.ufrj.br/~carlos/ensino.html> último acesso em abril de 2002.
- [8] <http://www.if.ufrgs.br/tex/fis01043> último acesso em dezembro de 2001
- [9] <http://www.monumental.com/rshorne/gram.html> último acesso em dezembro de 2001
- [10] STESGAARD, I. and LAEGSGAARD, E. *Listening to the coefficient of restitution-revisited*. Am. J. Phys. **69** (4), March 2001, pp.301- 305.
- [11] BERNSTEIN, A. D. *Listening to the coefficient of restitution*. Am. J. Phys., **45** (1), January 1977, pp.41-43.
- [12] SMITH, A P., SPENCER, D. C. and JONES, E. D. *Microcomputer listen to the coefficient of restitution*. Am. J. Phys., **49** (3), Feb1981, pp.136- 40.
- [13] VEIT, E. A. e TEODORO, V. - trabalho submetido à Revista Brasileira de Ensino de Física.
- [14] <http://www.mathworks.com>. último acesso em dezembro de 2001
- [15] VUOLO, H. *J Fundamentos da Teoria de Erros* – Editora Edgar Blucher LTDA 2.a edição –1996.