

# Índice general

<b>I</b>	<b>Series numéricas - Integral de Riemann</b>	<b>2</b>
<b>1.</b>	<b>Series Numéricas</b>	<b>3</b>
1.1.	Definiciones y conceptos . . . . .	4
1.2.	Propiedades de las series . . . . .	6
1.3.	Series de términos positivos . . . . .	7
1.3.1.	Series de Bertrand . . . . .	9
1.4.	Convergencia Absoluta . . . . .	9
1.5.	Series alternadas . . . . .	10
<b>2.</b>	<b>Integral de Riemann</b>	<b>12</b>
2.1.	Principales resultados . . . . .	12
2.2.	Métodos de Integración . . . . .	13
2.2.1.	Integración por partes . . . . .	13
2.2.2.	Integración por sustitución (cambio de variable) . . . . .	13
2.2.3.	Integración de funciones racionales . . . . .	14
<b>II</b>	<b>Integrales impropias y algunas aplicaciones a la física</b>	<b>20</b>
<b>3.</b>	<b>Integrales impropias</b>	<b>21</b>
3.1.	Conceptos y definiciones . . . . .	21
3.2.	Principales resultados . . . . .	23
3.3.	Integrales impropias “armónicas” y “de Bertrand” . . . . .	26
<b>4.</b>	<b>Aplicaciones</b>	<b>28</b>
4.1.	Campo eléctrico 1 . . . . .	28
4.2.	Campo eléctrico 2 . . . . .	30
4.3.	Circuito RL . . . . .	32

---

<sup>1</sup>El resumen completo del curso se encuentra en [www.anep.edu.uy/ipa-fisica](http://www.anep.edu.uy/ipa-fisica).

# Capítulo 1

## Series Numéricas

Las series numéricas son sucesiones muy particulares ya que se definen (o se generan) a partir de otra sucesión. Dos ejemplos sencillos aparecen en la definición de  $e$  y en la “Paradoja de Zenón”.

Una forma de definir  $e$  es a través de la suma:<sup>1</sup>

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} ,$$

cuyo límite es  $e$ , es decir:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e .$$

Sin entrar en pormenores sobre la historia de la tortuga y su particular caminata, en ella aparece una suma de reales en la que cada sumando es la mitad del anterior:<sup>2</sup>

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} ,$$

cuyo límite es 2, o sea:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2 .$$

Como veremos más adelante, si bien fue presentado sin rigor, se trata de un par de ejemplos de series convergentes, para percibir la diferencia veamos el siguiente ejemplo:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 2^n = \sum_{i=0}^n 2^i .$$

En caso de calcular el límite de esa suma, es notorio que es infinito.

---

<sup>1</sup>Recuerde que  $0! = 1$ .

<sup>2</sup>Recuerde que  $k^0 = 1$ .

Es decir:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n 2^i = +\infty .$$

## 1.1. Definiciones y conceptos

**Definición 1.1** Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión real. Definimos una nueva sucesión  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , a la que le llamamos serie generada o engendrada por  $(a_n)$ , a la siguiente:

$$A_0 = a_0$$

$$A_1 = a_0 + a_1$$

$$A_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$\vdots$

$$A_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

A  $A_n$  se le llama suma parcial de la serie o también reducida enésima de la serie.

Usaremos la notación  $\sum a_n$  para referirnos a la serie generada por  $(a_n)$ .

**Ejemplo 1.2** La sucesión dada por  $a_n = \frac{1}{n!}$  genera  $(A_n) : A_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$ . Esta sucesión es conocida por nosotros (es decir, esta serie) y su límite es el número  $e$ .

**Ejemplo 1.3** La sucesión dada por  $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$  genera  $A_n = \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1 - \frac{1}{3}^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$ . Su límite es  $\frac{3}{2}$ .

**Ejemplo 1.4**  $a_n = (-1)^n$  genera  $A_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^n$ . Por lo que,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } n = \dot{2}, \text{ tenemos que } A_n = 1, \text{ es decir, } A_{2i} = 1 \\ \text{Si } n \neq \dot{2}, \text{ tenemos que } A_n = 0, \text{ es decir, } A_{2i+1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (A_n)$  no tiene límite.

**Ejemplo 1.5** Consideremos la sucesión de los números naturales, es decir  $(a_n) = (1, 2, 3, 4, \dots)$ .

Dicha sucesión genera la  $A_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ .

Claramente,  $\lim A_n = \lim \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$ .

Como hemos podido observar, estas sucesiones tan particulares (a las que convenimos en llamar series) pueden tener límite o no. Si bien ya están definidos estos conceptos, al tratarse de un tipo de sucesiones con aplicaciones y usos particulares e importantes, daremos algunas definiciones al respecto.

**Definición 1.6** Sea  $\sum a_n$  una serie, decimos que:

- $\sum a_n$  converge ( notación:  $\sum a_n \in \mathbb{C}$  )  $\Leftrightarrow \lim A_n = k \in \mathbb{R}$

En este caso decimos que la serie  $\sum a_n$  converge con suma  $k$  y escribimos que<sup>3</sup>  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = k$ .

$$\blacksquare \sum a_n \text{ diverge ( notación: } \sum a_n \mathbb{D} ) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim A_n = +\infty \\ \text{ó} \\ \lim A_n = -\infty \end{cases} .$$

En este caso decimos que la serie  $\sum a_n$  diverge a más o menos infinito (según corresponda).

$$\blacksquare \sum a_n \text{ oscila ( notación: } \sum a_n \text{ OSC) } \Leftrightarrow \text{no existe } \lim A_n .$$

**Observación 1.7** Nótese que el comportamiento de una serie no se modifica si no tenemos en cuenta a los primeros  $p$  términos de la sucesión que la genera. Lo que sí se modifica es, en caso de convergencia, su suma.

**Observación 1.8** En aquellos ejercicios que se pide “clasificar una serie” debemos determinar si la misma converge, diverge u oscila.

**Ejemplo 1.9** Consideremos la serie  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ . Intentaremos clasificarla y en caso de convergencia encontrar su suma.

Como  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , las sumas parciales de la serie son de la forma:

$$\sum_{n=1}^p \frac{1}{n(n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{2}) + \dots + (\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) = 1 - \frac{1}{p+1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$$

Por lo tanto  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$  es una serie convergente y su suma es 1, es decir,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ .

De donde,  $\sum \frac{1}{2^n} \mathbb{C}$  y suma es 2.

Los ejemplos 1.3 y 1.9 son casos particulares de unas clases de series que son las geométricas y las telescópicas. A continuación definiremos cada una de ellas y las clasificaremos.

**Definición 1.10** Llamaremos series geométricas a las de la forma:  $\sum q^n$ ,  $q \in \mathbb{R}$ .

**Definición 1.11** Diremos que una serie  $\sum a_n$  es una serie telescópica si y sólo si existe una sucesión  $(b_n)$  tal que  $a_n = \begin{cases} b_n - b_{n+1} \\ \text{ó} \\ b_{n+1} - b_n \end{cases}$ . (es decir, si el término general de la  $(a_n)$  se puede expresar como la diferencia de dos términos consecutivos de otra  $(b_n)$ ).

**Teorema 1.12** Sea una serie geométrica  $\sum q^n$ . Entonces:

1. Si  $|q| < 1$  tendremos que  $\sum q^n \mathbb{C}$  y además  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

<sup>3</sup>Si bien hemos escrito que sumamos a partir de  $n = 0$ , esto no es riguroso, bien pudo sumarse a partir de cierto natural  $p > 0$ .

2. Si  $q \geq 1$  tendremos que  $\sum q^n \mathbb{D}$
3. Si  $q \leq -1$  tendremos que  $\sum q^n$  OSC

**Teorema 1.13** Sea una serie telescópica  $\sum a_n$ , (esto es:  $a_n = b_n - b_{n+1}$ ). Entonces:

1. Si  $\lim b_n = k \in \mathbb{R}$ , tendremos que  $\sum a_n \mathbb{C}$  y además  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = b_0 - k$
2. Si  $\lim b_n = \begin{cases} +\infty \\ \text{ó} \\ -\infty \end{cases}$ , tendremos que  $\sum a_n \mathbb{D}$ , ( $a \mp \infty$  respectivamente)
3. Si no existe el  $\lim b_n$ , tendremos que  $\sum a_n$  OSC.

## 1.2. Propiedades de las series

Estas propiedades tienen relevancia pues las integrales también las verifican con las analogías del caso..

**Propiedad 1.14** Esta propiedad fue mencionada en la observación 1.7. Es decir:

si dos sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$  están vinculadas de la siguiente manera:  $a_n = b_{n+p}$  en donde  $p \in \mathbb{N}$ , entonces  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  tienen el mismo comportamiento, (esto es, ambas convergen, ambas oscilan o ambas divergen).<sup>4</sup>

**Propiedad 1.15** Si dos series  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  son convergentes, entonces  $\sum (a_n + b_n)$  también lo es y si además tenemos que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = l_1$  y  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = l_2$ , entonces  $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) = l_1 + l_2$ .

**Propiedad 1.16** Sean  $\sum a_n$  y  $k \in \mathbb{R}^*$ , entonces  $\sum a_n$  y  $\sum (ka_n)$  tienen el mismo comportamiento y si además  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = l$  entonces  $\sum_{n=0}^{+\infty} (ka_n) = kl$ .

**Observación 1.17** Las propiedades 1.15 y 1.16 se conocen con el nombre de propiedades de linealidad.

**Propiedad 1.18** Condición necesaria para la convergencia de una serie.

Sea  $\sum a_n$  una serie convergente, entonces  $\lim a_n = 0$ .

Tal como su nombre lo indica estamos ante una condición necesaria de convergencia. Dicha condición no es suficiente para garantizar la convergencia de una serie, para eso, veamos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.19** Sea  $\sum L \left(\frac{n+1}{n}\right)$ . Probaremos que es divergente pese a que  $\lim \left(L \left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = 0$

$$\sum_{n=1}^p L \left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^p (L(n+1) - Ln) = L(p+1) - L1 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty,$$

por lo tanto  $\sum L \left(\frac{n+1}{n}\right) \mathbb{D}$

<sup>4</sup>De ser ambas convergentes y si conociéramos la suma de una ¿es posible deducir la suma de la otra?

### 1.3. Series de términos positivos

**Definición 1.20** Decimos que una serie es de términos positivos<sup>5</sup> si la sucesión que la genera tiene su recorrido contenido en  $[0, +\infty)$ . En otras palabras,  $\sum a_n$  es S.T.P.  $\Leftrightarrow a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

**Observación 1.21** Notemos que en virtud de la propiedad 1.14, las propiedades que probemos en esta sección serán válidas para aquellas series generadas por sucesiones  $(a_n)$  tales que  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n > p$ .

**Proposición 1.22** Las S.T.P. no oscilan, más específicamente: la serie de términos positivos  $\sum a_n$  será convergente o divergente según  $\{A_n\}$  sea un conjunto acotado o no.

**Teorema 1.23** Criterio de comparación I.

Sean  $(a_n)$  y  $(b_n)$  tales que  $0 \leq a_n \leq b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ <sup>6</sup>. Entonces tenemos:

1.  $\sum b_n \mathbb{C} \Rightarrow \sum a_n \mathbb{C}$
2.  $\sum a_n \mathbb{D} \Rightarrow \sum b_n \mathbb{D}$

**Corolario 1.24** Criterio de comparación II.

Si  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  son S.T.P. y el  $\lim \frac{a_n}{b_n} = k \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  tienen el mismo comportamiento (es decir, ambas convergen o ambas divergen)

**Ejemplo 1.25** Clasifiquemos  $\sum \frac{1}{n^2}$ . Para clasificarla la compararemos con  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ , serie de la cual conocemos su comportamiento. Fue clasificada convergente en el ejemplo 1.9.

Como  $\lim \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim \frac{n+1}{n} = 1$ , tenemos que ambas series tienen el mismo comportamiento y por lo tanto  $\sum \frac{1}{n^2} \mathbb{C}$ .

**Observación 1.26** De hecho, al conocer que  $\sum \frac{1}{n^2} \mathbb{C}$  podemos concluir, por el criterio de comparación I, que  $\sum \frac{1}{n^\alpha} \mathbb{C}$ , cualquiera sea  $\alpha \geq 2$ .

**Ejemplo 1.27** Clasifiquemos  $\sum \frac{1}{n}$ . En este caso la compararemos con la serie  $\sum L\left(\frac{n+1}{n}\right)$ .

Primero veremos que tienen el mismo comportamiento:  $L\left(\frac{n+1}{n}\right) = L\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ . O sea que  $\lim \frac{L\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$  y por lo tanto tienen el mismo comportamiento. Como fue demostrado en el ejemplo 1.19,  $\sum L\left(\frac{n+1}{n}\right) \mathbb{D}$ , por lo cual,  $\sum \frac{1}{n} \mathbb{D}$ .

**Observación 1.28** De hecho, al conocer que  $\sum \frac{1}{n} \mathbb{D}$  podemos concluir, por el criterio de comparación I, que  $\sum \frac{1}{n^\alpha} \mathbb{D}$ , cualquiera sea  $\alpha \leq 1$ . Uniendo esto a lo observado en 1.26, nos faltaría saber qué comportamiento tienen las series de la forma  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  solamente para  $\alpha \in (1, 2)$ . Estas series llamadas series armónicas pueden clasificarse totalmente por varios métodos, dos

<sup>5</sup>De hecho, se trata de series de términos no negativos.

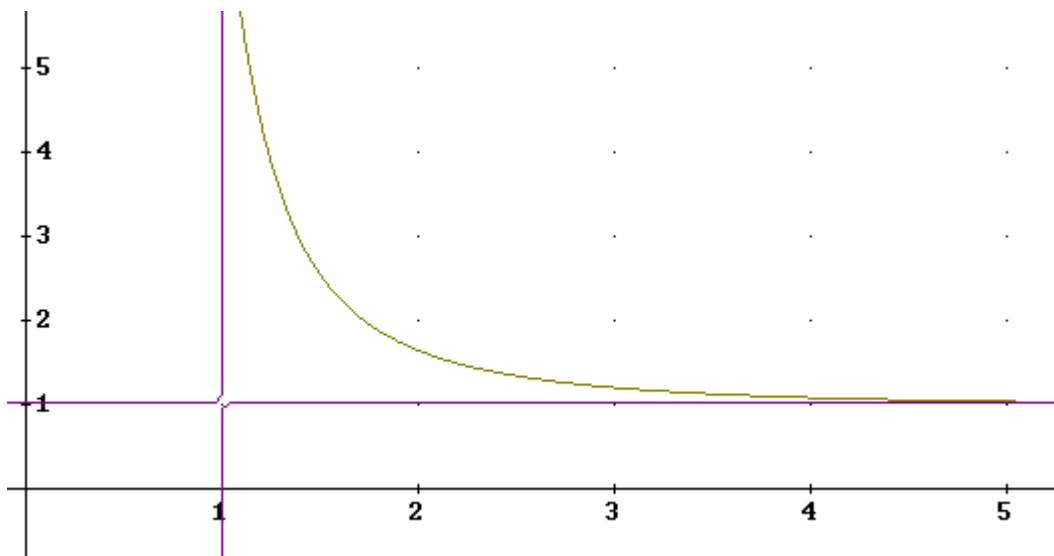
<sup>6</sup>En virtud de la propiedad 1.14 bastaba con que se verificara a partir de algún natural.

de los más conocidos son el criterio de la integral de Cauchy y el criterio llamado “del  $2^k$ ” (ver [1]). Nosotros, dado que los mecanismos usados en ellos exceden los contenidos del curso, aceptaremos que  $\sum \frac{1}{n^\alpha} \mathbb{C}$  para  $\alpha \in (1, 2)$  y en resumen tendremos que:

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \mathbb{C} & \text{para } \alpha > 1 \\ \mathbb{D} & \text{para } \alpha \leq 1 \end{cases} . \quad (1.1)$$

Nótese que para cada  $\alpha > 1$  tenemos definido un número real y por lo tanto una función. Dicha función es conocida como “función zeta”, es decir,

$$\zeta : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$



**Observación 1.29** Algunos datos de esta función:

- $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$
- $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{90}\pi^4$
- $\zeta(6) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{945}\pi^6$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$

Las series armónicas, a su vez, son clasificadas a través de una generalización mayor: las series de Bertrand.

### 1.3.1. Series de Bertrand

**Definición 1.30** Llamamos series de Bertrand a las generadas por sucesiones de la forma:

$$(a_n) : a_n = \frac{1}{n^\alpha L^\beta(n)}$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son números reales.

Es decir,

$$\sum a_n \text{ es de Bertrand} \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{n^\alpha L^\beta(n)}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.^7$$

**Teorema 1.31**  $\sum \frac{1}{n^\alpha L^\beta(n)}$  se clasifica de la siguiente manera:

- converge si  $\alpha > 1$ , cualquiera sea  $\beta$
- diverge si  $\alpha < 1$ , cualquiera sea  $\beta$
- si  $\alpha = 1$ , converge si  $\beta > 1$  y diverge si  $\beta \leq 1$ .<sup>8</sup>

## 1.4. Convergencia Absoluta

**Teorema 1.32** Sea una sucesión  $(a_n)$  tal que  $\sum |a_n| \in \mathbb{C}$ . Entonces  $\sum a_n \in \mathbb{C}$ .

**Definición 1.33** Decimos que la serie  $\sum a_n$  converge absolutamente (o que es absolutamente convergente) si y sólo si  $\sum |a_n| \in \mathbb{C}$ .

**Notación 1.34**  $\sum a_n \in \mathbb{CA}$ .

**Observación 1.35** El corolario 1.32 se enuncia de la siguiente manera: “si una serie converge absolutamente, entonces converge”. Más adelante veremos, a través de contraejemplos, que el recíproco no es cierto, es decir: una serie puede ser convergente pero la serie de los valores absolutos ser divergente.

**Ejemplo 1.36** Clasifiquemos  $\sum \frac{\text{sen } n}{n^2}$ . Veremos que converge absolutamente y que por lo tanto converge.

Como  $-1 \leq \text{sen } n \leq 1$ , tenemos que  $|\frac{\text{sen } n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$ . Luego, como  $\sum \frac{1}{n^2} \in \mathbb{C}$  por tratarse de una serie armónica de exponente 2, tenemos, en virtud del criterio de comparación I, que  $\sum |\frac{\text{sen } n}{n^2}| \in \mathbb{C}$ , lo que implica que  $\sum \frac{\text{sen } n}{n^2} \in \mathbb{CA}$  y de ahí que  $\sum \frac{\text{sen } n}{n^2} \in \mathbb{C}$ .

En la próxima sección veremos un nuevo tipo de series, llamadas series alternadas y su principal resultado: el teorema de Leibniz.

<sup>7</sup>Más aún: las series de Bertrand son de la forma:  $\sum \frac{1}{n^\alpha L^\beta(n) L^\gamma(L(n))}$ , etc.

<sup>8</sup>Este resultado se extiende para más parámetros.

## 1.5. Series alternadas

**Definición 1.37** Decimos que una serie es alternada si y sólo si es de la forma  $\sum (-1)^n a_n$ , donde  $(a_n)$  es una sucesión tal que  $a_n \geq 0$  o  $a_n \leq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Ejemplo 1.38** Consideremos la serie  $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ . Como puede observarse, es una serie alternada. Veamos el comportamiento de sus sumas parciales.

$$\blacksquare A_8 = \sum_{n=1}^8 \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{533}{840}$$

$$\blacksquare A_{10} = \sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = A_8 + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) = \frac{1627}{2520}$$

En general, tenemos que  $(A_{2n})$  (sumas parciales de índice par) es una sucesión estrictamente creciente.

Veremos que ocurre con las de índice impar.

$$\blacksquare A_5 = \sum_{n=1}^5 \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$$

$$\blacksquare A_7 = \sum_{n=1}^7 \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = A_5 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) = \frac{319}{420}$$

En general, tenemos que  $(A_{2n+1})$  (sumas parciales de índice impar) es una sucesión estrictamente decreciente.

Esto prueba que  $(A_{2n}, A_{2n+1})$  es un par de sucesiones monótonas convergentes cuyo límite común es el llamado elemento de separación, en este caso es  $L2$ .<sup>9</sup> Es importante notar también, que por el hecho de que  $A_{2n} \leq L2 \leq A_{2n+1}$  y de que ambas tienen el mismo límite, éste puede ser aproximado por una suma parcial  $A_p$  cualquiera, de la que estamos seguros que el error cometido (sea éste por defecto o por exceso) es menor que  $a_{p+1}$ , es decir por el primer sumando que no es tenido en cuenta en la suma parcial. Por ejemplo:  $L2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ , donde el error (en este caso, por defecto) es menor que  $\frac{1}{5}$ .<sup>10</sup>

El ejemplo que acabamos de estudiar no es más que un caso particular de lo que ocurre en el siguiente teorema.

**Teorema 1.39** Sea  $(a_n)$  una sucesión decreciente tal que  $\lim a_n = 0$ . Entonces  $\sum (-1)^{n+1} a_n$  es una serie convergente cuya suma  $k \approx A_p$  con un error menor que  $a_{p+1}$ .

**Observación 1.40** Este teorema es conocido como “criterio de Leibniz para series alternadas”.

<sup>9</sup>No es trivial que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = L2$ , por lo que aceptaremos dicho resultado.

<sup>10</sup>Recuerde el lector que  $L2 \approx 0.693$ , que  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \approx 0.583$

**Ejemplo 1.41** Se considera la serie  $\sum \frac{(-1)^n}{n!}$ . La misma puede ser clasificada por el criterio de convergencia absoluta como convergente (intente hacerlo). Sin embargo usaremos para ello el criterio de Leibniz. Veamos si la sucesión  $(a_n) : a_n = \frac{1}{n!}$  satisface las condiciones:

- $\lim \frac{1}{n!} = 0$
- $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$  es evidentemente menor que  $a_n = \frac{1}{n!}$ , luego  $(a_n)$  es estrictamente decreciente.

Por lo que acabamos de probar, en virtud del teorema 1.39 tenemos que  $\sum \frac{(-1)^n}{n!} \in \mathbb{C}$ .

Además podemos calcular aproximadamente su suma. Intentaremos calcularla con un error menor que  $\frac{1}{10000}$ . O sea, debemos hallar  $p \in \mathbb{N}$  de modo que su suma  $k \approx \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n}{n!}$  con un error menor que  $\frac{1}{10000}$ . Para ello buscaremos  $p$  que cumpla que  $\frac{1}{(p+1)!} < \frac{1}{10000}$ , o lo que es lo mismo, que  $(p+1)! > 10000$ , lo que vale si y sólo si  $p \geq 7$ .

Por lo tanto  $k \approx \sum_{n=0}^7 \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{103}{280}$  con un error menor que  $\frac{1}{8!} = \frac{1}{40320}$  (bastante menor que lo que se pedía).

**Observación 1.42** El límite anterior, de hecho es  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$ . Compruebe con su calculadora que los datos obtenidos en el ejercicio anterior son correctos.

**Ejemplo 1.43** Contraejemplo del recíproco del corolario 1.32.

Como dijéramos en la observación 1.35, existen series convergentes pero que no son absolutamente convergentes. La siguiente es una de ellas.

Sea  $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ , como acabamos de ver, es una serie convergente con suma  $L2$ , sin embargo, en valor absoluto, se genera la serie  $\sum \frac{1}{n}$  que es divergente. Este tipo de series da motivo a la siguiente definición.

**Definición 1.44** Decimos que la serie  $\sum a_n$  es condicionalmente convergente (se denota  $\mathbb{C}\mathbb{C}$ ) si y sólo si  $\sum a_n \in \mathbb{C}$  y  $\sum |a_n| \notin \mathbb{D}$ .

**Ejercicio 1.45** Encuentre otros ejemplos de series que convergen condicionalmente.

**Observación 1.46** Las series condicionalmente convergentes han sido objeto de estudio de célebres matemáticos, entre ellos está Riemann, quien demostró una propiedad sorprendente: si una serie es condicionalmente convergente, entonces podemos reordenarla de modo que su suma sea el número que se elija, o bien que diverja a más o a menos infinito o hasta se podría lograr que oscilara del modo elegido.